

Basis und Dimension eines Vektorraumes

Definition:

Jede Menge linear unabhängiger Vektoren, aus denen sich jeder Vektor des Raumes $\mathbb{R}^3$ bzw. der Ebene $\mathbb{R}^2$ erzeugen lässt, bildet eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$.

Folgerung:

Drei bzw. zwei linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$.
Jeder weitere Vektor lässt sich dann als Linearkombination der Basisvektoren darstellen.

Die Anzahl der Vektoren einer Basis heißt Dimension.

Folgerung:

Die Ebene $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional, der Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ ist dreidimensional.

Aufgaben:

1 Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. ☐

2 Bestimmen Sie den Wert von $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. ☒

3 Bestimmen Sie den Wert von $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. ☒

- 4 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ mit dem Ursprung 0 sind die Punkte $A(1/0/-2)$, $B(-1/2/2)$ und $C_k(k/-k/-2-k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben. (Abitur 2010 BII)

Untersuchen Sie, für welche Werte von k die drei Vektoren $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ und $\vec{OC}_k$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. ☒

- 5.0 Im $\mathbb{R}^3$ sind die folgenden Vektoren gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c}_p = \begin{pmatrix} p+4 \\ 2p \\ 3-4p \end{pmatrix} \text{ mit } p \in \mathbb{R} \text{ und } \vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}. \text{ (Abitur 2017 BI)}$$

- 5.1 Bestimmen Sie den Wert des Parameters p , für den die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}_p$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. ☒

- 5.2 Drücken Sie den Vektor $\vec{d}$ durch eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}_{-2}$ (d.h. für $p = -2$) aus. ☐

Lösungen:

1

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(I) \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$(II) \quad \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$(III) \quad 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 3 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -5 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -8 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ das LGS ist eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ die Vektoren sind linear unabhängig

$\Rightarrow$ die Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$

2

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -k & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -k & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ das LGS ist eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ die Vektoren bilden für alle $k \in \mathbb{R}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$

3

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ für $k \neq 0$ ist das LGS eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ für $k \neq 0$ bilden die Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$

4

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} k \\ -k \\ -2-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & 0 \\ 0 & 2 & -k & 0 \\ -2 & 2 & -2-k & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & 0 \\ 0 & 2 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -2+k & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ für $k \neq 2$ ist das LGS eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ für $k \neq 2$ bilden die Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$

5.1

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} p+4 \\ -2p \\ 3-4p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & p+4 & 0 \\ 2 & 0 & -2p & 0 \\ -3 & 2 & 3-4p & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & p+4 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & 14 & 15-p & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & p+4 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 8p-8 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ für $p \neq 1$ ist das LGS eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ die Vektoren sind linear unabhängig

$\Rightarrow$ die Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$

5.2

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & 11 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -5 \\ 0 & -8 & -8 & 12 \\ 0 & 14 & 17 & -18 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -5 \\ 0 & -8 & -8 & 12 \\ 0 & 0 & -24 & -24 \end{array} \right)$$

$$\text{(III)} \Rightarrow -24\lambda_3 = -24 \Rightarrow \lambda_3 = 1$$

$$\text{(II)} \Rightarrow -8\lambda_2 - 8 \cdot 1 = 12 \Rightarrow \lambda_2 = -2,5$$

$$\text{(I)} \Rightarrow \lambda_1 - 4 \cdot 2,5 + 2 \cdot 1 = -5 \Rightarrow \lambda_1 = 3$$

$$\Rightarrow \vec{d} = 3 \cdot \vec{a} - 2,5 \cdot \vec{b} + \vec{c}_{-2}$$